

Método Adams-Bashforth-Moulton para calcular la potencia nuclear

DANIEL SUESCÚN DÍAZ*
MAURICIO NARVÁEZ PAREDES*
JORGE HERNANDO FIGUEROA JIMÉNEZ*
ANDRÉS FELIPE AMADOR RODRÍGUEZ*

Resumen

Este artículo presenta la solución de las ecuaciones que configuran la cinética puntual, utilizando un método numérico de predicción y corrección multipaso, denominado Adams-Bashforth-Moulton. Debido a la naturaleza que poseen las ecuaciones de la cinética puntual, se utilizarán los modificadores propios de este método numérico para aumentar la precisión en la aproximación obtenida. Al final, se compararán los resultados obtenidos con hallazgos presentados en el marco de otros trabajos que han aplicado diferentes métodos numéricos, tales como: Taylor de Orden 4, Hamming y diferencias finitas.

Palabras clave: Adams-Bashforth-Moulton, ecuaciones de la cinética puntual, fisión nuclear, Hamming, reactores nucleares.

Abstract

This paper presents the solution of the point kinetic equations using a numerical method of prediction and correction multistep called Adams-Bashforth-Moulton. Due to the nature of the point kinetics equations, modifiers will be used to increase the accuracy in the approximation obtained. The results are

(*) Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana Cali, Colombia. Grupo de Matemática y Estadística Aplicada. A. A 26239, Cali.

Fecha de recepción: 18/09/2013 • Fecha de aceptación: 30/09/2013.

compared with different works that have been presented in other studies with different numerical methods such as Taylor of Order 4, Hamming and finite differences.

Keywords: Adams-Bashforth-Moulton, point kinetics equation, nuclear fission, Hamming, nuclear reactors.

1. Introducción

Un reactor nuclear es un dispositivo en el cual las reacciones de fisión nuclear pueden ser mantenidas de forma controlada. La fisión nuclear ocurre cuando los núcleos de átomos de gran peso, como el U-235, U-233 y Pu-239, se dividen en otros núcleos más pequeños, liberando energía, del orden de 200 Mev, por cada evento de fisión. Esta liberación de energía calienta agua hasta formar vapor y mueve una turbina que ayuda a generar electricidad. A partir de este proceso de fisión, resulta de especial interés el estudio de la potencia y de la concentración de neutrones retrasados, los cuales se encuentran modelados y relacionados a través de las ecuaciones de la cinética puntual (Duderstadt & Hamilton, 1976).

En una publicación reciente, se presentó el método de Hamming para resolver numéricamente la potencia en un reactor nuclear (Suescún, Figueroa & Bonilla, 2013). Este método fue aplicado, en primer lugar, para encontrar el valor de la reactividad (Suescún, Flórez & Rodríguez, 2012), mejorando notablemente los resultados obtenidos en la literatura, sin usar la *transformada de Laplace* (Suescún, Martínez & Carvalho Da Silva, 2008).

En este nuevo trabajo, se propone resolver el sistema de ecuaciones diferenciales basadas en las ecuaciones de la cinética puntual, por medio del método de pronóstico predicción de Adams-Bashforth-Moulton. Esto con el objetivo de permitir el cálculo de la potencia nuclear, utilizando los modificadores derivados del error de truncamiento local, propios de todo método numérico que sigue el esquema de predicción y corrección.

2. Generalidades

Las ecuaciones de la cinética puntual para seis grupos de precursores, son las siguientes (Duderstadt & Hamilton, 1976):

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left[\frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right] P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2)$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$P(t=0) = P_0 \quad (3)$$

$$C_i(t=0) = \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} P_0 \quad (4)$$

Aquí, $P(t)$ es la potencia nuclear, $C_i(t)$ es la concentración del i-ésimo grupo de precursores, $\rho(t)$ es la reactividad, λ_i es la constante de decaimiento del i-ésimo grupo de precursores, β_i es la fracción efectiva del i-ésimo grupo de precursores, β es la fracción efectiva total y Λ es el tiempo de generación, el cual se tomará como 2×10^{-5} s. En función del trabajo aquí desarrollado, se tomaron diferentes valores para la reactividad, como se reportan en el estudio de Suescún et al. (2013).

Los métodos numéricos tradicionales (Euler, Heun, Taylor y Runge-Kutta) son conocidos como métodos de un solo paso, pues únicamente necesitan el punto (t_i, y_i) para calcular el punto (t_{i+1}, y_{i+1}) .

Los métodos numéricos multipaso utilizan varios puntos anteriores, con el fin de calcular el punto actual. Adams-Bashforth-Moulton (ABM) es un método multipaso que emplea los puntos (t_{i-3}, y_{i-3}) , (t_{i-2}, y_{i-2}) , (t_{i-1}, y_{i-1}) (t_i, y_i) , para calcular el punto (t_{i+1}, y_{i+1}) ; es decir, utiliza los cuatro puntos anteriores para calcular el punto actual.

El método ABM es un método numérico predictor-corrector; esto implica que primero calcula una aproximación para el punto actual (predictor) y luego la refina haciendo un segundo cálculo, donde utiliza el valor predictor calculado (corrector). La fórmula para el predictor se denota así:

$$P_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (-9f_{k-3} + 37f_{k-2} - 59f_{k-1} + 55f_k) \quad (5)$$

El corrector se expresa así:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f_{k+1}) \quad (6)$$

Para el método ABM se pueden derivar los modificadores del predictor y el corrector, a partir de los errores de truncamiento local de (5) y (6).

Es posible demostrar que el modificador del predictor se puede denotar:

$$MP_{k+1} = P_{k+1} + \frac{251}{270} (y_k - P_k) \quad (7)$$

También, es posible demostrar que el modificador del corrector se puede escribir como:

$$My_{k+1} = y_{k+1} - \frac{19}{270} (y_{k+1} - P_{k+1}) \quad (8)$$

Sustituyendo y_{k+1} por P_{k+1} en (6) y considerando que $f_{k+1}=f(t_{k+1}, P_{k+1})$, se tiene que:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (f_{k-2} - 5f_{k-1} + 19f_k + 9f(t_{k+1}, MP_{k+1})) \quad (9)$$

Ahora, sustituyendo el y_{k+1} obtenido en (9) por y_{k+1} en (8) y y_{k+1} de (7) por P_{k+1} en (8), se tiene que el valor de salida está dado finalmente por:

$$My_{k+1} = y_{k+1} - \frac{19}{270} (y_{k+1} - MP_{k+1}) \quad (10)$$

Por otro lado, es posible demostrar que la estabilidad del método viene dada por la siguiente condición:

$$h < \frac{0.75}{|f_y(t, y)|} \quad (11)$$

Debido a que el método de ABM utiliza siempre cuatro puntos anteriores para calcular el punto actual, resulta necesario tener los cuatro puntos iniciales para poder iniciar el método. Estos cuatro puntos se calcularán utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4) \quad (12)$$

Donde:

$$f_1 = f(t_k, y_k) \quad (13)$$

$$f_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f_1\right) \quad (14)$$

$$f_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f_2\right) \quad (15)$$

$$f_4 = f(t_k + h, y_k + hf_3) \quad (16)$$

3. Resultados

A continuación se muestran los resultados obtenidos empleando el método ABM, así como su comparación con otros métodos tradicionales de un solo paso, tales como: Taylor de orden 4, diferencias finitas y el método multipaso que fue usado recientemente, conocido como el método de Hamming. El valor exacto fue tomado del artículo de Kinard & Allen (2004). Los demás valores son resultados de simulaciones realizadas por los autores.

Tabla 1. Potencia encontrada al resolver las ecuaciones de la cinética puntual en los tiempos 1s, 10 s y 20 s, con una reactividad de 300 pcm (partes por cien mil)

Método	t=1s	t=10s	t=20s	h[s]	E. máx.
Valor exacto	2.2098	8.0192	28.297	-	0
ABM	2.209840	8.019200	28.297400	1e-3	3.99e-4
Taylor Orden 4	2.209849	8.019221	28.297474	1e-4	4.74e-4
Hamming	2.20984	8.019199	28.297399	1e-3	3.99e-4
Dif. finitas	2.2098	8.0192	28.2974	1e-6	4e-4

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2. Potencia encontrada al resolver las ecuaciones de la cinética puntual en los tiempos 0.1 s, 2 s y 10 s, con una reactividad de 550 pcm

Método	t=0.1s	t=2s	t=10s	h[s]	E. máx.
Valor exacto	5.2100	43.025	1.3886e-5	-	0
ABM	5.208165	43.025043	1.388599e+5	1e-2	1.84e-3
Taylor Orden 4	5.210099	43.025561	1.388617e+5	1e-4	5.61e-4
Hamming	5.215306	43.025143	1.38860e+5	1e-2	5.31e-3
Dif. finitas	5.2100	43.0251	1.38860e+5	1e-6	1e-4

Fuente: elaboración propia.

Tabla 3. Potencia encontrada al resolver las ecuaciones de la cinética puntual en los tiempos 0.01 s, 0.5 s y 2 s, con una reactividad de 700 pcm

Método	t=0.01s	t=0.5s	t=2s	h[s]	E. máx.
Valor exacto	4.5088	5.3459e+3	2.0591e+11	-	0
ABM	4.50885	5.34592e+3	2.05922e+11	1e-2	1.26e-4
Taylor Orden 4	4.50885	5.34590e+3	2.05918e+11	1e-4	8.30e-5
Hamming	4.50885	5.34588e+3	2.05916e+11	1e-2	5.90e-5
Dif. finitas	4.50885	5.34571e+3	2.05887e+11	1e-6	2.30e-4

Fuente: elaboración propia.

Tabla 4. Potencia encontrada al resolver las ecuaciones de la cinética puntual en los tiempos 0.01s, 0.1 s y 1 s, con una reactividad de 800 pcm

Método	t=0.01s	t=0.1s	t=1s	h[s]	E. máx.
Valor exacto	6.2029	1.4104e+3	6.16336e+23	-	0
ABM	6.202854	1.41042e+3	6.16335e+23	1e-3	4.62e-5
Taylor Orden 4	6.202904	1.41044e+3	6.16406e+23	1e-5	7.04e-4
Hamming	6.20285	1.41042e+3	6.16335e+23	1e-3	5e-5
Dif. finitas	6.202683	1.41022e+3	6.15475e+23	1e-6	8.61e-3

Fuente: elaboración propia.

4. Conclusiones

El método de Adams-Bashforth-Moulton fue usado para calcular la potencia nuclear, a partir de las ecuaciones de la cinética puntual. Se encontraron buenas aproximaciones para la potencia, bajo diferentes valores de reactividad y tiempos, con al menos 4 cifras significativas acertadas. El error cometido por el método es del orden $O(h^5)$, esto es, similar al de Taylor de Orden 4 y Runge-Kutta de Orden 4.

En general, el método ofrece una buena aproximación frente a un tamaño de paso de $10^{-3}s$. Dicha estabilidad se debe, en gran parte, al uso de los modificadores propios del método, que fueron de gran utilidad para vencer un poco las falencias propias del método ABM en los sistemas de ecuaciones de carácter fuertemente acoplado, como lo son las ecuaciones de la cinética puntual.

El método ABM es más preciso que el método de Taylor de Orden 4, el cual requiere un tamaño de paso de $10^{-4}s$ para valores de reactividad menores a 700 pcm y $10^{-5}s$ para valores de reactividad alrededor de los 800 pcm. Con respecto a Hamming, la precisión obtenida con ABM fue buena, ya que la diferencia entre los errores máximos registrados para ABM y Hamming con 550 y 800 pcm fueron 1.84×10^{-3} y 4.62×10^{-5} , a favor de Adams-Bashforth-Moulton, respectivamente. ●

Referencias

Duderstadt, J. J. & Hamilton, L. J. (1976). *Nuclear Reactor Analysis*. New York: Jhon Wiley & Sons Inc.

Kinard, M. & Allen, E. J. (2004). Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics. *Annals of Nuclear Energy*, (31), 1039.

Suescún, D., Figueroa, J. H. & Bonilla, H. F. (2013). Solución numérica de la potencia en un reactor nuclear usando el método de Hamming. *Scientia et Technica*, (18), 381.

Suescún, D., Flórez, J. F. & Rodríguez, J. A. (2012). Hamming method for solving the delayed neutron precursor concentration for reactivity calculation. *Annals of Nuclear Energy*, (42), 47.

Suescún, D., Martínez, D. & Carvalho Da Silva, A. (2008). Calculation of reactivity using a finite impulse response filter. *Annals of Nuclear Energy*, (35), 472.